Exercices de colles 2023/2024

Maxence Jauberty

Janvier 2023

Résumé

Il s'agit d'une liste d'exercices données pour la classe prépa du lycée Corot en MP. La difficulté d'un exercice est indiquée par le nombre de tasses de café. Globalement, ils sont faits pour une classe qui majoritairement intègre dans les concours CCP et Mines-Telecom, avec quelques-uns qui vont dans des Centrales ou des grandes mines. Les exercices ☕sont censés être accessibles avec du cours, les ☕☕demandent d'aller plus loin mais j'estime qu'un élève moyen peut le résoudre avec un peu d'aide, les ☕☕☕sont des exercices semblables en niveau aux concours Centrale ou Mines-Ponts et les ☕☕☕☕ne sont pas nécessairement les plus compliqués mais ils demandent beaucoup d'initiative et d'intuition.

Question(s) de cours

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N.

1. Donner la définition d'un point intérieur.
2. Montrer qu'une boule fermée est fermée.

Exercice 1 : BCCP 34 ☕

Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\overline{A}$ est convexe.

Exercice 2 : ☕☕

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note N_1 la norme 1 sur cet espace et N_∞ la norme ∞.

1. Rappeler les définitions de ces normes.
   On définit les ensembles O, F suivants :
$$O = \{f \in E,\ f(0) > 0\} \text{ et } F = \left\{ f \in E,\ \int_0^1 f(x)dx \leq 0 \right\}$$
2. Montrer que O est un ouvert pour la norme N_∞.
3. Montrer que F est fermé pour la norme N_∞ et N_1.
4. O est-il un ouvert pour (E, N_1) ?

Exercice 3 : ☕☕☕

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si F est ouvert dans E, alors $F = E$.
2. Montrer que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \emptyset$.

Exercice 4 : ☕☕☕☕

Soit E un espace vectoriel normé. On considère F une partie fermée de E, montrer que
$$\partial(\partial F) = \partial F.$$

Exercice 1 :
cf. la correction en ligne.

Exercice 2 :

1. Définitions.
2. Poser $\phi : E \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$ qui est bien une application : linéaire et continue de (E, N_∞) vers $\mathbb{R}$ car
$$|\phi(f)| = |f(0)| \leq N_\infty(f).$$
Par ailleurs, $O = \phi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^*\right)$. $\mathbb{R}_+^*$ étant un ouvert, son image réciproque par une fonction continue est aussi ouvert, notamment O.
3. Poser $\psi : E \ni f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)dx \in \mathbb{R}$. ψ est bien une application : linéaire et continue de (E, N_∞) vers $\mathbb{R}$ mais aussi de (E, N_1) car :
$$|\psi(f)| = \left|\int_0^1 f(x)dx\right| \leq N_1(f) = \int_0^1 |f(x)|dx \leq N_\infty(f).$$
Par ailleurs, $F = \psi^{-1}(\mathbb{R}_-)$ et $\mathbb{R}_-$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Donc F est un fermé de E pour la norme N_∞ et pour la norme N_1.
4. Question nettement plus dure. Attention, on a bien $N_1 \leq N_\infty$ mais cela ne veut pas dire que les ouverts de N_∞ sont aussi ceux de N_1. C'est l'inverse ! Pour s'en convaincre, penser en voisinages et faites les dessins (indice : les boules de N_1 sont plus petites que celles de N_∞).

   O n'est pas un ouvert (et sert de contre-exemple à l'erreur d'au-dessus). **Conseil : Pour montrer qu'un ensemble n'est pas ouvert, passer par le complémentaire.** Montrer que O^c n'est pas fermé dans N_1. On introduit la suite de fonctions f_n suivante :
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \\ nx & \text{sinon.} \end{cases}$$
   Le dessin est suffisant pour l'idée. Clairement $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in O^c$ car $f_n(0) = 0$. Posons $u = x \mapsto 1$.
$$\begin{aligned} N(f_n - u)_1 &= \int_0^1 |f_n(x) - 1|dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n}} 1 - nxdx + \int_{\frac{1}{n}}^1 0dx \\ &= \frac{1}{n} - \int_0^{\frac{1}{n}} nx \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$
   On conclut alors $f_n \to u$ dans (E, N_1). Or u est une fonction de O donc on a trouvé une suite de fonctions du complémentaire de O qui converge vers un élément de O, donc le complémentaire de O n'est pas fermé i.e. O n'est pas ouvert.

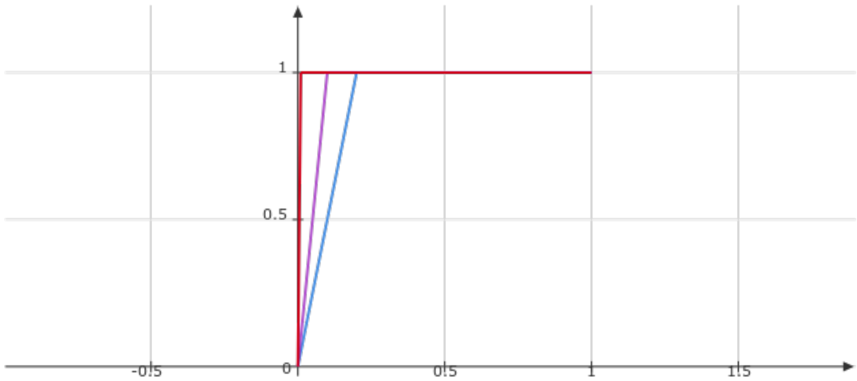

FIGURE 1 – f_n pour $n = 5, 10, 100$

Exercice 3 :

1. Résultat classique. Si vous considérez que F est ouvert et un sous-espace vectoriel, on sait qu'il existe une boule de centre 0 et de rayon r incluse dans F, appelons là B.

   Si x est un élément de E, alors $\dfrac{rx}{2N(x)}$ est dans B. En effet
   $$N\left(\frac{rx}{2N(x)}\right) = \frac{r}{2} < r.$$
   Puisque la boule est incluse dans F, x appartient également à F. Par la structure d'espace vectoriel, $x \in F$. On a donc $E \subset F$ et l'autre inclusion est donnée par définition de F.

2. Supposons que l'intérieur de F soit non vide. Il existe un élément x tel que
   $$\exists r > 0, B(x, r) \subset F$$
   . Or F est stable par translation puisqu'il s'agit d'un espace vectoriel. On montre alors que $B(0, r) \subset F$. Pour s'en convaincre, faire un dessin et plus formellement :

   Soit $y \in B(0, r)$, $z = x + y$ est alors dans $B(x, r)$ car $N(z - x) = N(y)$. Donc $z \in F$ par hypothèse et puisque x est dans F ainsi que z, $y \in F$.

   Alors 0 est un point intérieur, et on a vu à la question 1. que cela suffisait pour montrer que $E = F$. Par contraposée, on montre alors que si l'intérieur de F est vide, alors $E = F$.

Exercice 4 :

L'exercice n'est pas fondamentalement dur. Puisque F est fermée, on peut écrire
$$\partial F = F \cap \overline{F^c}.$$
Puisque ∂F est aussi fermée
$$\partial(\partial F) = \partial F \cap \overline{(\partial F)^c}$$

Il faut ensuite un peu combiner nos égalités :

$$\partial(\partial F) = \left(F \cap \overline{F^c}\right) \cap \overline{(\partial F)^c}$$

Pour y voir plus clair sur ce qu'on a à montrer, on peut réécrire notre condition :

$$F \cap \left(\overline{F^c} \cap \overline{(\partial F)^c}\right) = F \cap \overline{F^c} \Longleftrightarrow \overline{F^c} \cap \overline{(\partial F)^c} = \overline{F^c}$$

Ceci est encore équivalent à $\overline{F^c} \subset \overline{(\partial F)^c}$.

On peut voir d'après la première égalité que $(\partial F) \subset F$, donc que $F^c \subset (\partial F)^c$ et finalement que $\overline{F^c} \subset \overline{(\partial F)^c}$.

On conclut alors que $\partial(\partial F) = \partial F$.

Question(s) de cours

Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N.

1. Donner la définition d'un point adhérent.
2. Montrer qu'une boule ouverte est ouverte.

Exercice 5 : BCCP 37

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme de N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 6 : /

Soit une suite (u_n) strictement croissante de réels, donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit fermé.

Exercice 7 : Densité des matrices inversibles

Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $GL_n(\mathbb{K})$ est-il fermé ?
2. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq N,\ \det\left(M - \frac{1}{k}I_n\right) \neq 0$.
3. En déduire que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Exercice 8 : Adhérence des matrices diagonalisables

On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$(resp. $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices $n \times n$ trigonalisables (resp. diagonalisables).

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, unitaire et de degré n, montrer que
$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathfrak{Im}(z)|^n$$
2. En déduire que l'adhérence de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2
Une suite croissante admet une limite, finie ou bien infinie. Supposons que u soit une suite convergente. En particulier, si l'ensemble des valeurs de la suite est fermée, alors la limite l de u est dans l'ensemble des valeurs. Notons $u_p = \lim_n u_n$. On va montrer qu'il y a contradiction.

On peut remarquer alors que $u_n < u_{n+1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_p$. Par exemple, $u_{p+1} \leq u_p$ mais par stricte croissance $u_{p+1} > u_p$. Ceci est faux donc u ne peut être convergente.

Donc si la suite est majorée, l'ensemble n'est pas fermé.

Supposons que u soit non majorée. Si on pose $A =]-\infty, u_0[\cup \bigcup_n]u_n, u_{n+1}[$, on pose U l'ensemble des valeurs de la suite. On a alors que :

$$U = A^c (i.e. U^c = A)$$

. où ici ^{c} décrit le complémentaire par rapport à $\mathbb{R}$. Si x est dans $\mathbb{R}$ et qu'il n'est pas une valeur de la suite, puisque que la suite n'est pas majorée et est strictement croissante, il existe p tel que $x \in]u_p, u_{p+1}[$.
Réciproquement, si x est dans A, il se situe toujours entre deux valeurs de la suite car u est strictement croissante.

A est une union dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$ donc A est un ouvert et donc $U = A^c$ est fermé.

Exercice 3 :
C'est un classique. Rapidement :
1. Non, $\frac{1}{k} I_n$ est inversible pour tout k mais la limite est 0.
2. Le polynôme caractéristique n'a qu'un nombre fini de racines.
3. $M_k = M - \frac{1}{k} I_n$ tend vers M et à partir d'un certain rang, les matrices sont inversibles.

Exercice 4 :
Aussi un classique.

1. Soit $P = (X - \alpha_1)...(X - \alpha_n)$. Pour $z = x + iy$, on a :

$$|x + iy - \alpha_k| \geq |\mathfrak{Im}(x + iy - \alpha_l)| \geq |y|.$$

   Et donc :

$$|P(z)| \geq |y|^n$$

   . Réciproquement, supposons que l'inéquation soit vraie, si z est une racine. $P(z) = 0$, on a

$$0 \geq |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

   . Donc $\mathfrak{Im}(z) = 0$. Les racines de P sont toutes réelles donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Dans un premier temps, on peut montrer que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ est effectivement fermé. On considère une suite de matrices M_k trigonalisables dans $\mathbb{R}$ qui convergent vers M. χ_{M_k} est alors scindé sur $\mathbb{R}$.

$$\forall k, \forall z, \ |\chi_{M_k}(z)| \geq |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

Rappelons que $A \mapsto \chi_A$ est continue. Alors :

$$\forall z,\ |\chi_M(z)| \geq |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

Donc χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ donc M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

En particulier, on sait que $\mathcal{D}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ donc $\overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})} \subset \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$.

La réciproque est la partie très dure de la preuve. Il faut trouver une suite de matrices diagonalisables qui convergent vers M une matrice trigonalisable.

Premièrement, on considère P inversible et T une matrice triangulaire supérieure telle que $M = PTP^{-1}$.

Si tous les éléments diagonaux $t_{k,k}$ de T sont égaux, alors on pose T_m la matrice triangulaire identique à T sauf sur la diagonale : $t_{k,k}^{(m)} = t_{k,k} + \frac{1}{mk}$. Tous les éléments diagonaux sont deux à deux distincts, on en déduit donc que T_m est diagonalisables (valeurs propres distinctes deux à deux). Et on a évidemment que $T_m \to T$.

Désormais, supposons que les éléments diagonaux de T ne soient pas tous égaux. On pose

$$\alpha = \min \{|T_{ii} - T_{jj}|\,,\ T_{ii} \neq T_{jj}\}$$

On procède à la même transformation que précédemment mais cette fois $t_k^{(m)}k = t_{kk} + \dfrac{\alpha}{mk}$.

Si $t_{ii} = t_{jj}$, alors $t_i^{(m)}i \neq t_j^{(m)}j$.
Si $t_{ii} \neq t_{jj}$

$$\left|t_i^{(m)}i - t_j^{(m)}j\right| = \left|t_{ii} - t_{jj} + \frac{\alpha}{k}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right)\right| \geq |t_{ii} - t_{jj}| - \frac{\alpha}{k}\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right|$$

Puisque $\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| < 1$ et $\frac{1}{k} \leq 1$ donc $\frac{\alpha}{k}\left|\frac{1}{i} - \frac{1}{j}\right| < 1$.

$$\left|t_i^{(m)}i - t_j^{(m)}j\right| > |t_{ii} - t_{jj}| - \alpha \leq \alpha - \alpha = 0.$$

Finalement, on conclut que les éléments diagonaux de T_m sont deux à deux distincts donc T_m tend vers T en étant une suite de matrices diagonalisables.

Cela suffit pour conclure puisqu'il suffit ensuite de multiplier par des matrices inversibles. On montre ainsi que $\mathcal{T}_n(\mathbb{R}) \subset \overline{\mathcal{D}_n(\mathbb{R})}$

Question(s) de cours

Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme N. Si une boule fermée est fermée et qu'une boule ouverte est ouverte, une sphère est-elle fermée, ouverte ou ni l'une ni l'autre ?

Exercice 9 : BCCP 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 10 : /

Soit E l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. Montrer que quelque soit la norme N définie sur E, $D : E \ni f \mapsto f' \in E$ n'est jamais continue.

Exercice 11 : /

Soit E l'ensemble des suites complexes telles que $\sum_n |x_n|$ converge. On pose $\|u\| = \sum_n |x_n|$. L'ensemble $F = \left\{ u \in E,\ \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = 1 \right\}$ est-il ... ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 12 :

Soit A une partie convexe et dense de $\mathbb{R}^n$. On souhaite montrer que $A = \mathbb{R}^n$.

1. Montrer le résultat pour $n = 1$.
2. Démontrer le résultat. (On pourra procéder par récurrence)

Exercice 2 :
Posons $f_n = x \mapsto e^{nx}$, $(f_n)_n$ est une suite de E et on a facilement que

$$\frac{N(D(f))}{N(f)} = n$$

. Or D est clairement une application linéaire donc on contredit la caractérisation de la continuité pour les applications linéaires, donc D n'est pas continue sur (E, N).

Exercice 3 :
C'est un fermé car $F = \phi^{-1}(\{1\})$ où $\phi = u \mapsto \sum u_n$, et que ϕ est bien continue pour $\| \; \|$.
Un résultat bien connu nous permettrait de terminer rapidement : les espaces ouverts et fermés de E un espace vectoriel normé sont E et $\emptyset$. Or F n'est ni l'un ni l'autre. Autrement, on peut regarder le complémentaire de F et montrer qu'il ne s'agit pas d'un fermé.

On note δ la suite qui vaut 1 au rang 0 et est nulle partout ailleurs. On pose ensuite la suite de suites $u^{(p)}$:

$$u^{(p)} = \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)\delta$$

. Simplement, on remarque que $u^{(p)}$ est une suite de F^c : $\forall p,\ \phi(u^{(p)}) = 1 + \frac{1}{p+1}$. Par ailleurs, on peut montrer qu'elle converge vers δ pour la norme $\| \; \|$.

$$\|u^{(p)} - \delta\| = \frac{1}{p+1}$$

Donc $\|u^{(p)} - \delta\| \to 0$. On remarque que $\delta \in F$, donc F^c n'est pas fermé. On a montré ainsi que F n'était pas ouvert.

F n'est pas borné non plus. On pose $v^{(p)}$ la suite définie par $v_0^{(p)} = 1$, $v_1^{(p)} = p$, $v_2^{(p)} = -p$ et nulle partout ailleurs. Trivialement, $(v^{(p)})$ est une suite de F et

$$\|v^{(p)}\| = 2p + 1$$

. On peut alors choisir une norme aussi grande que l'on souhaite.

Question(s) de cours

Justifier rapidement pourquoi $x \mapsto \|x\|$ est lipschitzienne sur $(E, \| \ \|)$.

Exercice 13 : BCCP 35 ☕

E et F désignent deux espaces vectoriels normés. On note $\| \ \|_E$ (resp. $\| \ \|_F$) la norme sur E (resp. sur F).

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E. On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$, alors $f(x_n) \to f(a)$.

   Montrer que $P1$ et $P2$ sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense de E, et soient f et g deux applications continues de E dans F. Démontrer que si, $f = g$ sur A alors $f = g$ sur E.

Exercice 14 : ☕☕

Soit U, V deux parties denses de (E, N), un espace vectoriel normé. On suppose que U est ouvert, montrer que $U \cap V$ est une partie dense de E.

Exercice 15 : Polynôme caractéristique ☕☕☕

On souhaite montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

1. Montrer que $\chi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \ni M \mapsto \chi_M$ est une application continue. On justifiera le choix des normes.
2. On considère dans un premier temps que A et B sont inversibles. Montrer alors que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. Conclure que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ pour deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 16 : Polynômes scindés à racines simples ☕☕☕☕

On pose $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des polynômes scindés à racines simples de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

Bonus : en déduire l'intérieur des matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :
Avec des dessins, l'intuition vient. Soient $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. On souhaite trouver un élément de $U \cap V$ dans la boule de centre x et de rayon ε.

On peut, par densité, dire qu'il existe $u \in U$ tel que $u \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Maintenant, on peut utiliser la propriété d'ouvert de U, il existe un voisinage de u inclus dans U, i.e. il existe $r > 0$, $B(u, r) \subset U$.

Maintenant, on peut utiliser la densité de V pour justifier l'existence d'un élément y de V dans boule $B(u, m)$ où m est le minimum entre r et $\frac{\varepsilon}{2}$ (on a alors que y est dans la boule de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ quoiqu'il arrive mais aussi dans U puisque $B(u, r) \subset U$.

Donc $y \in U \cap V$ et il nous reste à montrer qu'il est bien dans la boule de rayon ε autour de x.
$$N(x-y) = N(x-u+u-y) \leq N(x-u) + N(u-y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
ce qui conclut la preuve.

Exercice 3 :
1. χ_A est un polynôme dont les coefficients s'expriment en polynômes des coefficiens de la matrice A, c'est donc une application polynomiale d'où la continuité (cf. la formule somme-produit du déterminant).
2.
$$\det(\lambda I - AB) = \det(B)\det(\lambda I - AB)\det(B)^{-1} = \det(\lambda BB^{-1} - BABB^{-1}) = \det(\lambda I - BA)$$
D'où $\chi_{BA} = \chi_{AB}$ si B est inversible.
3. Résultat classique : les matrices inversibles sont denses dans l'ensemble des matrices. A l'oral, n'hésitez pas à montrer que vous le savez (seulement si vous savez le démontrer). L'examinateur vous laissera peut-être utiliser le résultat sans le prouver. Ici, on peut utiliser 1. et 2. Soit A, B deux matrices. Il existe une suite de matrices inversibles (B_n) qui converge vers B. On a également que $AB_n \to AB$ et $B_nA \to BA$.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \chi_{B_nA} = \chi_{AB_n}.$$
Par continuité : $\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Question(s) de cours

Soit (E, N_E) un espace vectoriel normé. Soit A une partie dense de E pour N. Soient f, g deux applications continues de (E, N_E) vers (F, N_F). Montrer que si $f = g$ sur A alors $f = g$ sur E.

Exercice 17 : BCCP 1

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Les normes $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$ sont-elles équivalentes ? Justifier.
2. Dans cette question, on munit E de la norme $\|_{\|}\infty$.
   (a) Soit $u : E \ni f \mapsto f(0) \in \mathbb{R}$, prouver que u est une application continue sur E.
   (b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$ est un fermé pour la norme $\| \|_\infty$. Prouver que F est une partie fermée de E pour $\| \|_\infty$.
3. Dans cette question, on munit E de la norme $\| \|_1$. On pose $c : x \mapsto 1$. Et on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.
   (b) On pose $F = \{f \in E,\ f(0) = 0\}$. Prouver que $c \in \overline{F}$. Est-ce que F est une partie fermée de E pour $\| \|_1$

Exercice 18 :

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer qu'il s'agit d'un ensemble fermé et borné (pour quelles normes ?).

Exercice 19 : Polynôme minimal

Montrer que l'application qui $\Pi : A \mapsto \Pi_A$ où Π_A est le polynôme minimal de A n'est pas une application continue.

Exercice 20 : Adhérence des matrices diagonalisables

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$(resp. $\mathcal{D}^*{}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ (resp. scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$).

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé, unitaire et de degré n, montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\mathfrak{Im}(z)|^n$$

2. En déduire que l'adhérence de $\mathcal{D}^*{}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 2 :

Posons $\phi : A \mapsto A^T A$. On a que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \phi^{-1}(\{I_n\})$ (par définition). On peut montrer que ϕ est une application continue donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Si on considère la norme euclidienne, on a :

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^T A)} = \sqrt{\operatorname{Tr}(I_n)} = \sqrt{n}.$$

On en déduit que la partie est également bornée.

Exercice 3 :

On peut réduire le contre-exemple au cas $n = 2$. On peut considérer les matrices suivantes :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} & 1 \end{pmatrix}$$

On peut calculer le polynôme caractéristique dans un premier temps :

$$\chi_{A_n} = (X-1)^2 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Dans notre cas, on sait que le polynôme minimal est bien le polynôme caractéristique car A_n n'est pas une matrice d'homothétie (donc son polynôme minimal est au moins de degré 2).

De plus $A_n \to I$ et

$$\Pi_{A_n} \to (X-1)^2.$$

Or, $\Pi_I = X - 1$ donc on contredit la caractérisation séquentielle de la continuité, Π n'est pas continue.

Question(s) de cours

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$. On note $\| \|_E$ (resp. $\| \|_F$) la norme sur E (resp. F).

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E

   P2. f est continue en 0_E

   P3. $\exists k > 0,\ \forall x \in E,\ \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$

2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie. On considère l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(f) = \int_0^1 f(t)dt$$

   Démonter que ϕ est linéaire et continue.

Exercice 21 :

On note E l'ensemble des suites réelles bornées et on considère $\|u\|_\infty = \max |u_k|$. On définit $\Delta : E \ni u \mapsto (u_{n+1} - u_n)_n \in E$. Montrer que Δ est continue et déterminer sa norme d'opérateur.

Exercice 22 :

Soit A une matrice telle que A^n converge vers une matrice L. Montrer que L est une matrice de projection.

Exercice 23 :

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble des matrices.

Exercice 24 :

1. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues $\sqrt{2}$-périodiques et $1-$-périodiques.
2. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$f(x, y) = f(x + 1, y) = f(x, y + 1) = f(x + y, y).$$

Exercice 1 :
Δ est linéaire et on montre que :
$$\|\Delta(u)\| \leq 2\|u\|$$
donc Δ est continue par le critère pour les applications linéaires. Par ailleurs, si on prend la suite $u_n = (-1)^n$, elle atteint la borne donc la norme d'opérateur de Δ est 2.
Exercice 2 :
$A \mapsto A^2$ est une application continue (polynomiale en les coefficients). D'une part $A^{2n} \to L$ et de l'autre $A^{2n} \to L^2$ par caractérisation séquentielle de la continuité.
Exercice 3 :
Résultat classique.
Exercice 4 :
1. Si on considère une fonction vérifiant ces propriétés, on a que :
$$\forall n, m \in \mathbb{Z},\ f(n + \sqrt{2}m) = f(0).$$
On pose $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{n + \sqrt{2}m,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Il s'agit d'un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Un résultat classique nous dit que : **Les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ ou bien dense dans $\mathbb{R}$.** La preuve de résultat est légèrement complexe mais montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$ peut se faire à la main.

La densité acquise, on a alors par continuité :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(0).$$
Réciproquement, si f est constante, elle vérifie bien les propriétés.
2. Posons $y = \sqrt{2}$ dans un premier temps, et on pose $g(x) = f(x, \sqrt{2})$. On a alors
$$g(x) = g(x + 1) = g(x + \sqrt{2}).$$
Par ailleurs, g est aussi continue, on en déduit que g vérifie les propriétés de 1. g est alors constante.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x, \sqrt{2}) = f(0, \sqrt{2})$$
On peut ensuite déduire que
$$\forall x, \forall n,\ f(x, \sqrt{2} + n) = f(0, \sqrt{2} + n).$$
Remarquons que le résultat est valide car $\sqrt{2}$ est irrationnel, donc pour $m\sqrt{2}$ avec $m \neq 0$ le résultat reste valide (par le même raisonnement), i.e.
$$\forall x, \forall n, \forall m \neq 0,\ f(x, n + m\sqrt{2}) = f(0, n + m\sqrt{2}).$$
On sait qu'il existe une suite d'éléments strictement positifs de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ qui converge vers 0. Par continuité, on a alors :
$$f(x, 0) = f(0, 0).$$
En particulier, on en déduit que $f(x, n) = f(0, n)$ et finalement que
$$\forall x, \forall m, n,\ f(x, n + m\sqrt{2}) = f(0, n + m\sqrt{2}).$$
On en déduit par continuité et densité que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x, y) = f(0, y) = f(0, y + 1).$$

Réciproquement, supposons que $f(x, y) = f(0, y) = f(0, y+1)$. Les propriétés sont trivialement vérifiées.

Conclusion les fonctions solutions sont les fonctions f telles qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $1-$périodique tel que $\forall x, y\ f(x, y) = h(y)$.

Remarque sur la densité : Pour montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$, on peut procéder de la manière suivante. Admettons qu'il existe un plus petit élément a de l'ensemble des éléments strictement positifs de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. D'une part, $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. D'autre part, si on prend $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, il existe n, δ tel que

$$x = na + \delta$$

avec $\geq 0\delta < a$. Si jamais $\delta \neq 0$, alors $\delta = x - na \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ce qui contredit la minimalité de a et donc $\delta = 0$, i.e. $x \in a\mathbb{Z}$. Notamment, on montre que $\sqrt{2} = an$ avec n un entier.
a est dans l'ensemble donc on montre que $\sqrt{2} = pn + qn\sqrt{2}$. Donc $\sqrt{2} = \frac{pn}{1-qn}$ sauf si $1 - qn = 0$. Etant donné que $\sqrt{2}$ est irrationnel, $qn = 1$, d'où $q = n = 1$. On déduit finalement que $\sqrt{2} = a$. Or $1 < \sqrt{2}$ donc on a une contradiction. Autrement dit : la borne inférieure de l'ensemble est 0.

Ce qui permet de dire qu'il existe des éléments aussi petits que l'on souhaite dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. En développant un peu l'idée, on peut alors montrer que l'ensemble est dense.

A noter que cette preuve est plus ou moins la démonstration du résultat utilisé dans l'exercice.

Question(s) de cours

Exercice 25 : BCCP66 ☕

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall A \in S_n(\mathbb{R}), \forall B \in S_n^+(\mathbb{R}), AB = BA \Longrightarrow A^2B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 26 : ☕

Soient E un espace vectoriel normé et $A_1, ..., A_n$ des parties connexes par arcs tels que $\bigcap_i A_i \neq \emptyset$.

1. Montrer que $\bigcup_i A_i$ est une partie connexe par arcs.
2. Est-il toujours vrai qu'une union de parties connexes par arcs est connexe par arcs ?

Exercice 27 : Théorème des compacts emboîtés ☕☕

Soit E un espace vectoriel normé, soit K un compact de E, on définit le diamètre $\delta(K)$ de K par

$$\delta(K) = \sup_{x,y \in K} \|x - y\|$$

1. Montrer que $\delta(K)$ est bien défini.
2. Supposons que $\delta(K) = 0$, que peut-on dire ?
3. On considère une suite de compact $(K_n)_n$ décroissante et telle que $(\delta(K_n))_n$ converge vers 0. On pose

   $$K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

   Montrer que K ne contient qu'un élément. Enoncer le résultat dans le cas où $E = \mathbb{R}$

Exercice 28 : Théorème de point fixe ☕☕☕

Soient K une partie compacte et $f : K \longrightarrow K$ une application vérifiant

$$\forall x, y \in K,\ x \neq y \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Question(s) de cours

Exercice 29 : BCCP13 ☕

1. Rappeler, oralement, la définition, par les suites de vecteurs, d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel normé est une partie fermée de cet espace.
3. Démontrer qu'une partie compacte d'un espace vectoriel d'un espace vectoriel normé est une partie bornée de cet espace.
   Indication : On pourra raisonner par l'absurde.
4. On se place sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\| \ \|_1$ définie pour tout polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de E par : $\|P\|_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$.
   (a) Justifier que $S(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_1 = 1\}$ est une partie fermée bornée de E.
   (b) Calculer $\|X^n - X^m\|_1$ pour m, n deux entiers naturels distincts.
   $S(0,1)$ est-elle une partie compacte de E ? Justifier.

Exercice 30 : Matrices stochastiques ☕

Matrice stochastique

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si

$$(i) \text{ Les coefficients de } A \text{ sont positifs}$$

$$(ii)\ \forall i \in \{1, ..., n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est une partie compacte et convexe.

Exercice 31 : Forme polaire ☕☕

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = R^2$.
2. Justifier alors qu'il existe pour une matrice A inversible une matrice $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = M^2$.
3. En déduire que pour une matrice inversible, il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que

$$A = SO.$$

Exercice 32 : ☕☕☕

1. Montrer que $\mathbb{C}^*$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Est-ce que $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs ?

Exercice 33 : Bonus : Théorème du sandwich au jambon 2D ☕☕☕

Soient A, B deux ouverts bornés non vides du plan, montrer qu'il existe une droite qui coupe A et B en deux parties de surfaces égales.

Question(s) de cours

Exercice 34 : BCCP63 ☕

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire. On considère la norme associée à ce produit scalaire.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$ est-il nécessairement l'endormorphisme nul.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   (b) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle u^*(x), u^*(y)\rangle$.
   (c) $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$

Exercice 35 : ☕

Montrer que $\mathbb{R}^2$ privé d'un nombre fini de points est connexe par arcs. Existe-t-il des cas où retirer des points fait perdre la propriété de connexité par arcs ?

Exercice 36 : Fonctions coercives ☕☕

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive si

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer qu'une fonction coercive admet un minimum sur E pour la norme considérée.

Exercice 37 : ☕☕☕

Soient E un espace vectoriel normé, K une partie compacte de E et $g : K \to K$ une application $1-$Lipschitzienne. L'objectif est de montrer que g est surjective si et seulement si g est une isométrie.

1. Supposons g surjective.
   (a) Considérons $x, y \in K$ et notons x_n et y_n des antécédents de x, y par g^n. Justifier l'existence de u, v des valeurs d'adhérence de (x_n) et (y_n). Montrer ensuite que $x - y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(u) - g^n(v))$.
   (b) Montrer ensuite que $(\|g^n(u) - g^n(v)\|)$ tend vers $\|x - y\|$. En déduire que g est une isométrie.
2. Supposons que g est une isométrie. Montrer que g est surjective.

Exercice 38 : Les obtusangles ☕☕☕

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.

Famille obtusangle

Une famille $(x_1, ..., x_p)$ est dite obtusangle si

$$\forall i, j \in \{1, ..., p\}, i \neq j \Longrightarrow \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

1. On suppose pour cette question seulement que $n = 2$, représenter une famille obstusangle à trois éléments. Est-il possible de définir une famille obtusangle à quatre éléments (réponse brève à l'oral) ?
2. On souhaite montrer désormais que si $(x_1, ..., x_p)$ est une famille obstusangle, alors $p \leq n + 1$.
   (a) Soit $\lambda_1, ..., \lambda_p$ des réels, on note I l'ensemble des indices i tels que λ_i soit positif. Montrer que
   $$\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0 \Longrightarrow \sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$$
   (b) En déduire que $x_1, ..., x_{p-1}$ est libre, puis conclure.

Exercice 39 : Matrice de rotation ☕

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E.

1. Donner la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $e_1 + e_2$.
2. Donner la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de $e_1 + e_2 + e_3$
3. Donner la matrice de rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$ autour de $2e_1 + e_3$

Exercice 40 : Fonctions d'opérateurs ☕☕

Soit A une matrice symétrique réelle de taille $n \times n$.

1. Justifier qu'elle n'admet que des valeurs propres réelles.
2. Justifier qu'il existe une famille $x_1, ..., x_n$ orthonormale de $\mathbb{R}^n$ tel que
   $$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^T x_i$$
   où $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes).

   On dit alors que A est sous forme normale.
3. Soit M une matrice diagonalisable Soit P une matrice orthogonale qui diagonalise M et $D(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ la matrice diagonale associée.

   Pour une fonction f :Sp$(M) \subset I \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit l'application suivante
   $$f : A \mapsto PD(f(\lambda_1), ..., f(\lambda_n))P^T$$
   Montrer que c'est une application bien définie (même si l'énonciation ne semble pas claire).

4. Est-ce que la définition introduite de $\exp(A)$ coïncide avec la définition usuelle de l'exponentielle de matrice ?

Exercice 41 : Relation d'ordre ☕

On note $S_n(\mathbb{R})^+$ l'ensemble des matrices symétriques positives. On définit la relation suivante sur les matrices symétriques

$$\forall A, B \in S_n(\mathbb{R}),\ A \leq B \Longleftrightarrow B - A \in S_n(\mathbb{R})^+ \tag{1}$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre.

Exercice 42 : ☕

Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact.

Exercice 43 : Dessins ☕

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme quelconque.

1. Dessiner une partie fermée non compacte et une partie compacte.
2. Dessiner un ouvert.
3. Dessiner une partie convexe.
4. Dessiner une partie connexe par arcs qui ne soit pas convexe.
5. Dessiner une partie non-connexe par arcs dont une des composantes connexes soit étoilée.

Exercice 44 : ☕

$GL_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 45 : Intersection de compacts ☕☕☕

Soient E un espace vectoriel normé et $(K_n)_n$ une suite décroissante de compact de E. On pose

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

1. Montrer que K n'est pas vide.
2. Si O est un ouvert de E tel que $K \subset O$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset O$

Question(s) de cours

Exercice 46 : ☕

Montrer qu'il existe une solution h développable en série entière de l'équation

$$xy'' + y' + y = 0.$$

Montrer que h ne s'annule qu'une seule fois sur $]0, 2[$.

Exercice 47 : ☕☕

On suppose que A et B sont deux matrices qui commutent.

1. Montrer que A commute avec $\exp(B)$.
2. On considère l'application suivante

$$\phi : [0, 1] \ni t \longmapsto \exp(t(A + B)) \exp(-tA) \exp(-tB) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

   Justifier que ϕ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. En déduire la relation suivante

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

Exercice 48 : ☕☕☕

Soit $f : x \mapsto \arctan(x)$.

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1 + x^2)^n}.$$

2. Déterminer le degré, la parité ainsi que le coefficient de ce polynôme P_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est scindé à racines simples.

Question(s) de cours

Soit (f_n) est une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que si (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f_n(x)dx \to \int_a^b f(x)dx$.

Exercice 49 : ☕

Résoudre le système différentiel suivant : $\begin{cases} x' &= 4x + 2y \\ y' &= -3x - y \end{cases}$

Exercice 50 : ☕☕

Soient $a < b$ des réels. Soient f, g deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On pose

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que Δ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$(g(b) - g(a))\, f'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c).$$

Exercice 51 : ☕☕☕

Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dérivables en 0 telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x + y) = f(x)f(y).$$

Question(s) de cours

Exercice 52 :

Montrer que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \ni M \mapsto \exp(M) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est continue.

Exercice 53 :

BCCP48

Exercice 54 :

Résoudre le problème de Cauchy suivant $\begin{cases} x' & = -x + 2y \\ y' & = -2x + 3y \\ x(0) & = 1 \\ y(0) & = -1 \end{cases}$

Exercice 55 :

Soit A une matrice antisymétrique. Démontrer que les solutions de l'équation suivante

$$X' = AX$$

sont toutes de même normes. Montrer que la réciproque est aussi vrai, i.e. que si une équation de la forme $X' = AX$ a pour solutions des vecteurs de normes égales, alors A est antisymétrique.

Question(s) de cours

On considère une équation de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0.$$

Montrer que le wronskien d'un système fondamental de solutions vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 56 : Pour s'échauffer

Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x \\ z' &= x + y + z \end{cases}$$

Exercice 57 : Théorème de Wilson

Soit k un corps fini. Calculer

$$P = \prod_{x \in k \setminus \{0\}} x.$$

En déduire que si p est premier alors $(p-1)! + 1$ est divisible par p.

Exercice 58 : Lemme de Cauchy

On considère un groupe fini divisible par un nombre premier p. On souhaite montrer qu'il existe un élément d'ordre p dans G.

1. On note $\sim$ la relation "à rotation près" défini sur G^p. $(x_1, ..., x_p) \sim (y_1, ..., y_p)$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i,\ x_i = y_{i+k \bmod p}$. Par exemple, $(0, 1, 2) \sim (1, 2, 0) \sim (2, 0, 1)$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. On considère ensuite l'ensemble E suivant

$$E = \{(g_1, ..., g_n) \in G^p,\ g_1 ... g_p = e\}.$$

   Déterminer le cardinal de E.
3. Montrer qu'une classe d'équivalence de $\sim$ est de cardinal 1 ou p.
4. En déduire qu'il existe un élément x d'ordre p.

Question(s) de cours

Soit G un groupe commutatif et fini. Montrer que si x est d'ordre fini d alors d divise le cardinal de G.

Exercice 59 : ☕

Déterminer les solutions de l'équation différentielle suivant :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}.$$

Exercice 60 : Radical d'un idéal ☕☕

Soit A un anneau. Soit I un idéal de A, on considère le radical de I défini par

$$\sqrt{I} = \{x \in A,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\}.$$

Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.

Exercice 61 : ☕☕☕(☕)

Soit G un groupe. On dit qu'un sous-groupe H de G est distingué (dans G) si pour tout $g \in G, gH = Hg$.

1. Montrer que $x \sim y \iff xy^{-1} \in H$ est une relation d'équivalence.
2. On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de G définies par la relation $\sim$ et $\overline{x}$ la classe d'équivalence associée à x. On définit le produit de deux classes par

$$\overline{xy} = \overline{x}\ \overline{y}.$$

   Justifier que ce produit est bien défini.
3. En déduire que G/H muni de ce produit est un groupe d'élément neutre H.
4. Soit f un morphisme de domaine G, montrer que $\ker(f)$ est distingué dans G et en déduire qu'il existe une bijection entre $G/\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 62 : ☕☕☕☕

Soit G un groupe fini dont les éléments sont au plus d'ordre 2. Montrer que si $G \neq \{e\}$, il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que G soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Question(s) de cours

Est-ce que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ est isormorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? Peut-on appliquer le théorème des restes chinois ici ?

Exercice 63 :

Soit A un anneau. On suppose que a est nilpotent i.e. $\exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = 0$. Montrer que $1 - a$ est inversible.

Exercice 64 :

On considère $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $2\pi-$périodique. On étudie l'équation suivante :

$$(E) \ : \ y'' + p(t)y = 0.$$

1. Justifier rapidement qu'il existe deux solutions linéairement indépendantes φ et ψ.
2. Montrer que si y est une solution de l'équation (E) alors $t \mapsto y(t + 2\pi)$ est aussi une solution de l'équation.
3. Montrer qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ telles que
$$\begin{cases} \varphi(t + 2\pi) & = a\varphi(t) + b\psi(t) \\ \psi(t + 2\pi) & = c\varphi(t) + d\psi(t) \end{cases}.$$
4. Montrer que (E) possède des solutions $2\pi-$périodiques non-nulles si et seulement si 1 est valeur propre de la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 65 :

Soient x, y deux éléments d'un groupe G abélien tels que x soit d'ordre p et y d'ordre q.

1. On suppose que $p \wedge q = 1$, montrer que l'ordre de xy est pq.
2. Soit d un diviseur de p. Démontrer qu'il existe un élément d'ordre d.
3. Montrer alors qu'il existe un élément d'ordre $p \vee q$.

Question(s) de cours

Calculer pour un nombre premier p et un entier k non nul $\varphi(p^k)$.
Combien y a-t-il d'éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/99\mathbb{Z}$?

Exercice 66 :

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ et l'application suivante :

$$f : E \ni P \longmapsto \int_0^1 P(t)^2 dt \in \mathbb{R}.$$

Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

Exercice 67 : Morphisme de Froebenius et théorème de Fermat

On considère un nombre premier $p \in \mathbb{P}$ supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que pour $k \in \{1, ..., p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$.
2. En déduire que $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \ni x \mapsto x^p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux.
3. En déduire une preuve du (petit) théorème de Fermat.

Exercice 68 :

Résoudre dans $\mathbb{Z}/65\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Exercice 69 : Anneau euclidien

Un anneau $(\mathcal{A}, +, \times)$ est dit euclidien s'il existe une application $f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$ appelée *stathme* telle que

$$\forall a \in \mathcal{A}, \forall b \in \mathcal{A}^*,\ \exists r, q \in \mathcal{A},\ a = bq + r \quad \text{avec } f(r) < f(b).$$

1. Citer rapidement des exemples d'anneaux euclidiens ainsi que leur stathme.
2. Montrer qu'un anneau euclidien est un anneau principal.
3. On souhaite désormais faire appliquer ce résultat sur l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$.

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\ ,\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{Z}[i]$ tel que

$$|z - z_0|^2 < 1.$$

   (b) En déduire que pour $z \in \mathbb{Z}[i]$ et $z' \in \mathbb{Z}[i]^*$, il existe $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que

$$|z - z'q|^2 < |q|^2.$$

   (c) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.

Question(s) de cours

1. Enoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(a|c \text{ et } b|c) \Longleftrightarrow ab|c.$$

Exercice 70 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \ [10] \\ x \equiv 5 \ [13] \end{cases}$$

Exercice 71 :

On considère la fonction $f : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$, montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ où elle est définie et calculer sa différentielle.

Exercice 72 : Radical d'un idéal

Soit A un anneau. Soit I un idéal de A, on considère le radical de I défini par

$$R(I) = \{x \in A, \ \exists n \in \mathbb{N}^*, \ x^n \in I\}.$$

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A.
2. Montrer que $R(R(I)) = R(I)$.
3. Soient I, J deux idéaux de A, montrer que

$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J)$$

Question(s) de cours

On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 73 : Différentielle de la fonction carré

On pose $f : \begin{cases} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^2 \end{cases}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle en chaque point.

Exercice 74 : Anneaux Noetheriens

1. Soit A un anneau principal, *i.e.* tous les idéaux de A sont de la forme xA avec $x \in A$. Montrer que toute suite d'idéaux de A croissante est stationnaire.
2. En que déduire que l'anneau des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ n'est pas principal.

Exercice 75 : Euler et Moebius

On note φ l'indicatrice d'Euler. Montrer que

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$